

**Beste Approximation
durch glatte Funktionen und Anwendungen
in der intermediären Approximation**

von
Ullrich Sattes
aus
Würzburg

1900

1980 101

**Beste Approximation
durch glatte Funktionen und Anwendungen
in der intermediären Approximation**

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Ullrich Sattes
aus
Würzburg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 11.2.80

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter: Prof. Dr. H. Berens

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. H. Strauß

I n h a l t

Vorwort	6
1. Einführung	
1.1. Funktionenklassen	11
1.2. Beste Approximation in $C(X)$	12
1.3. Das Peetre'sche K -Funktional	13
1.4. Vorzeichenwechsel und Perfekt-Splines	15
2. Beste Approximation durch W_r	
2.1. Ein Charakterisierungssatz	17
2.2. Anwendungen des Charakterisierungssatzes	28
2.3. Eine Teilcharakterisierung für W_2^*	31
2.4. Anwendungen	37
3. Intermediäre Approximation in $C(X)$	
3.1. Die Ergebnisse von Favard, Achieser-Krein	40
3.2. Beste Approximation in V_ω^r	43
3.3. Die Sätze von Bernstein und Fisher	46
3.4. Beste Approximation in $V_\omega^r[-1,+1]$	48
3.5. n -te Weiten von V_ω^r	52
Literatur	57
Lebenslauf	59

V o r w o r t

Eine der interessantesten Fragen der Approximations-
theorie ist die nach den 'besten Konstanten' für stetige,
reelle, 2π -periodische Funktionen $f \in C(\Pi)$.

So ist beispielsweise seit 1945 (vgl. Lorentz, 1966)
bekannt, daß für Funktionen f aus der Zygmundklasse

$$\text{Lip}(1;2;C(\Pi)) := \{f \in C(\Pi) : \sup(\omega_2(f;\delta)/\delta : \delta > 0) < \infty\}$$

der Approximationsgrad $E_n^*(f)$ bezüglich des Raumes $\mathcal{T}_n$
der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$ genau von der
Ordnung $O(n^{-1})$ ist, das heißt :

$$(*) \quad E_n^*(f) := \inf(\|f-g\|_\infty : g \in \mathcal{T}_n) \leq \frac{A}{n} \quad , \quad n=1,2,\dots$$

für eine Konstante $A > 0$; aber noch immer ungelöst ist
die Frage, welches die kleinstmögliche - beste - Konstante
 $A > 0$ in (*) ist.

In einer Reihe von Arbeiten in den Jahren 1961 - 1970
hatte N. P. Korneitschuk (Korneitschuk, 1976) das Problem
der besten Konstanten für Funktionen aus den Bernstein-Zyg-
mund-Klassen

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\alpha; r+2; C(\Pi)) &= \{f \in C(\Pi) : \sup(\omega_r(f;\delta)/\delta^\alpha : \delta > 0) < \infty\} \\ &\quad , \quad r < \alpha < r+1, \quad r \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

dadurch gelöst, daß er zu den äquivalenten Klassen

$$\{f \in C^{(r)}(\Pi) : f^{(r)} \in \text{Lip}(\alpha-r; 1; C(\Pi))\}$$

überging, und er lieferte dabei einige brillante Beweisideen.
Allerdings blieben für die Zygmundklassen $\text{Lip}(r; r+1; C(\Pi))$
die Lücken weiter bestehen.

Korneitschuks Idee der intermediären Approximation war nun der Ausgangspunkt dieser Arbeit, in der das Problem der besten Konstanten für die Zygmundklassen von einer anderen Warte aus gelöst werden soll.

Das Peetre'sche K-Funktional (siehe Bergh-Löfström, 1976)

$$K_r(t; f) := \inf(\|f - g\|_\infty + t \|g^{(r)}\|_\infty : g \in C^{(r)}(\Pi))$$

$$, r \in \mathbb{N},$$

einer stetigen Funktion f ist bekanntlich eine zu den Glättemoduln äquivalente Halbnorm :

$$2^{-r} \omega_r(f; \delta) \leq K_r\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^r; f\right) \leq A \omega_r(f; \delta) \quad , A > 0,$$

und beschreibt genau Korneitschuks intermediäre Approximation, nämlich eine verfeinerte Dreiecksungleichung für Mengen :

Sind nämlich $W, W', W_M'' \subset C(\Pi)$, $M > 0$, und ist

$$\delta(W, W') := \sup(\inf(\|f - g\|_\infty : g \in W') : f \in W),$$

so gilt

$$\delta(W, W') \leq \inf_{M > 0} (\delta(W, W_M'') + \delta(W_M'', W')) ,$$

was bei einer geschickten Wahl der parametrisierten Mengen W_M'' eine sehr gute Abschätzung liefert.

Somit stand für die beste Approximation von $f \in C(\Pi)$ mit

$$K_r(t; f) \leq t^\alpha \quad , t > 0,$$

vermittels des Satzes von Favard und Achieser-Krein sofort eine gute Abschätzung nach oben zur Verfügung :

$$E_n^*(f) \leq (\mathcal{K}_r / (n+1)^r)^\alpha ,$$

wobei $\mathcal{K}_r$ die Favard-Konstanten sind (siehe 3.1.).

Zum Nachweis dafür, daß die Konstante $(\mathcal{K}_r)^\alpha$ bestmöglich ist, war zunächst ein genaueres Studium des Peetre'schen K-Funktional erforderlich.

Die Definition von $K_r(t;f)$ legt sofort ein neues, jetzt nicht-lineares Approximationsproblem nahe :

Gegeben eine stetige Funktion f und eine Ableitungsschranke $M > 0$, bestimme

$$\delta_M := \inf(\|f-g\|_\infty : \|g^{(r)}\|_\infty \leq M) \geq 0 ;$$

dann gilt bestmöglich

$$K_r(t;f) \leq \delta_M + M t, \quad t > 0;$$

beschreibe weiter die Funktionen g^* mit $\|g^{*(r)}\|_\infty \leq M$, für die gilt

$$\delta_M = \|f - g^*\|_\infty.$$

In Kapitel 2 geben wir eine vollständige Lösung dieses Approximationsproblems für solche Funktionen f , die auf dem Intervall $I = [-1, +1]$ definiert sind. Im Charakterisierungssatz 2.1. zeigen wir, daß Lösungen g^* des Approximationsproblems auf einem Teilintervall J von I Perfekt-Splines sind, also r -fache Integrale von Signumsfunktionen, die auf J einer Alternantenbedingung genügen. Der Beweis von 2.1. wird eine starke Analogie zu dem des klassischen Tschebyshev'schen Alternantensatzes zeigen; an einer wesentlichen Stelle jedoch benötigen wir einen Ersatz für die Interpolation mit Polynomen (Lemma 2.5.).

An zwei Beispielen (2.6;2.7.) testen wir den Satz 2.1. und geben einen Vergleich zwischen dem zweiten K -Funktional und dem zweiten Glättemodul.

Im Periodischen haben wir noch keinen vollständigen Charakterisierungssatz in Sicht. Wir geben jedoch eine Teilcharakterisierung (2.8.) an, die zeigt, worin die wesentlichen

Unterschiede zwischen der besten Approximation durch die Klassen $\{ \|g^{(r)}\|_{\infty} \leq M \}$ im Periodischen und im Algebraischen liegen. Wieder an zwei Beispielen (2.10; 2.11.) erläutern wir, daß in einigen interessanten Fällen auch die Teilcharakterisierung zur exakten Bestimmung des Peetre'schen K-Funktionalis führt.

In Kapitel 3 behandeln wir unser ursprüngliches Problem der besten Approximation der Lipschitz- und Zygmund-Klassen.

Wir ersetzen die Funktionen t^{α} , $0 < \alpha \leq 1$, durch die allgemeineren K-Moduln, also isotone, konkave Funktionen $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $\lim_{t \rightarrow 0+} \omega(t) = 0$, und zeigen, daß für Funktionen f aus den Klassen

$$V_{\omega}^r := \{ f \in C(\Pi) : K_r(t; f) \leq \omega(t), t > 0 \}, \quad r \in \mathbb{N},$$

bestmöglich gilt :

$$(**) \quad E_n^*(f) \leq \omega(K_r/(n+1)^r) \quad (\text{Satz 3.3.}).$$

Es überrascht bei dem Ergebnis, daß extremale Funktionen in V_{ω}^r , also solche, für die in (**) Gleichheit herrscht, nicht notwendigerweise extremal in dem Sinne sein müssen, daß ihr K-Funktional mit ω übereinstimmt.

Wir geben jedoch auch extremale Funktionen an, die die eben genannte Eigenschaft erfüllen.

In den nachfolgenden Abschnitten 3.3. und 3.4. gehen wir auf das Approximationsproblem für V_{ω}^r auf dem Intervall $[-1, +1]$ ein. Wir geben eine kleine Anwendung (3.6.) des Charakterisierungssatzes von Fisher (3.5.) für die beste Approximation

von $\{ \|g^{(r)}\|_{\omega} \leq 1 \}$ durch Polynome, zeigen in 3.7. ein dem periodischen Satz 3.3. analoges Resultat und ermitteln unter Anwendung eines Satzes von Bernstein, daß unter gewissen Bedingungen die besten Approximationen von $V_{\omega}^r(\Pi)$ und $V_{\omega}^r[-1,+1]$ asymptotisch gleich sind.

Zum Abschluß (Abschnitt 3.5.) streifen wir noch die Frage der n-ten Weiten von V_{ω}^r und stellen fest, daß in Satz 3.3. mit den optimalen Räumen approximiert wurde.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Berens, der mich mit der Approximationstheorie vertraut gemacht hat, möchte ich an dieser Stelle ganz herzlich danken für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein förderndes Interesse und seine konstruktive Kritik.

1. Einführung

1.1. Funktionenklassen

Im folgenden sei X immer das reelle Intervall $[-1, +1]$ oder der Torus $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$.

Es bezeichne $\underline{C}(X)$ den Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf X , versehen mit der Tschebyschev-Norm

$$\|f\|_{\infty} = \max (|f(x)| : x \in X) \quad , \quad f \in C(X) ,$$

sowie $\underline{L}_{\infty}(X)$ den Raum der (Äquivalenzklassen von) reellen, Lebesgue-meßbaren, wesentlich beschränkten Funktionen auf X , versehen mit der Norm

$$\|f\|_{\infty} = \text{wes sup } (|f(x)| : x \in X) \quad , \quad f \in L_{\infty}(X) .$$

Für $r \in \mathbb{N}$ ist $\underline{C}^{(r)}(X)$ der Raum der r -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf X ,

$$C^{(r)}(X) = \{f : f, f', \dots, f^{(r)} \in C(X)\}$$

und $\underline{L}_{\infty}^{(r)}(X)$ der klassische Sobolev-Raum

$$L_{\infty}^{(r)}(X) = \{f \in C^{(r-1)}(X) : f^{(r-1)} \text{ absolut stetig}, f^{(r)} \in L_{\infty}(X)\} .$$

Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen stehen zunächst die Klassen

$$W_r(M) := \{f \in L_{\infty}^{(r)}(X) : \|f^{(r)}\|_{\infty} \leq M\} \quad , \quad M > 0 ,$$

insbesondere die Klasse $W_r := W_r(1)$. Zur genaueren Unterscheidung schreiben wir im Falle $X=\mathbb{T}$ auch W_r^* bzw. $W_r^*(M)$.

1.2. Beste Approximation in $C(X)$

Sind W, W' Teilmengen von $C(X)$, und ist $f \in C(X)$, so bezeichnet

$$d(f; W') := \inf (\|f - g\|_{\infty} : g \in W')$$

die beste Approximation von f in W' . Ist $g_0 \in W'$, und gilt

$$\|f - g_0\|_{\infty} = d(f; W'),$$

so heißt g_0 Element bester Approximation von f in W' . Die Menge aller Elemente bester Approximation von f in W' bezeichnen wir mit $P_{W'}(f)$. Wir nennen

$$\delta(W; W') := \sup (d(f; W') : f \in W)$$

die beste Approximation von W durch W' . Ist $f_0 \in W$, und gilt

$$d(f_0; W') = \delta(W; W'),$$

so heißt f_0 extremal in W (bezüglich W').

Ist $W' = \mathcal{P}_n$ der Raum der Polynome vom Grad $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir

$$d(f; W') = E_n(f) \quad \text{und} \quad \delta(W, W') = E_n(W).$$

Entsprechend schreiben wir, falls $W' = \mathcal{T}_n$ der Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$

$$d(f; W') = E_n^*(f) \quad \text{und} \quad \delta(W; W') = E_n^*(W).$$

In $\mathcal{P}_n$ und $\mathcal{T}_n$ gilt der klassische Tschebyschev'sche Alternantensatz :

$g^* \in \mathcal{P}_n$ (bzw. $g^* \in \mathcal{T}_n$) ist Element bester Approximation von $f \in C([-1, +1])$ in $\mathcal{P}_n$ (bzw. von $f \in C(\pi)$ in $\mathcal{T}_n$) genau dann, wenn $f - g^*$ eine Alternante der Länge $n+2$ (bzw. $2n+2$) besitzt.

Hierbei nennen wir eine endliche Folge $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ in X eine Alternante der Länge k (von $h \in C(X)$), falls gilt:

$$|h(x_i)| = \|h\|_{\infty}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \text{und}$$

$$h(x_i) = -h(x_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir nennen ein Element $x \in X$

E^+ - Punkt von h , falls $h(x) = + \|h\|_{\infty}$,

E^- - Punkt von h , falls $h(x) = - \|h\|_{\infty}$,

Extremalpunkt von h , falls x ein E^+ - oder ein E^- - Punkt von h ist. Die Gesamtheit aller Extremalpunkte von h bezeichnen wir mit M_h .

Eine wichtige Charakterisierung der besten Approximation von $f \in C(X)$ durch konvexe Mengen $W' \subset C(X)$ ist das Kolmogorov-Kriterium :

$$g^* \in P_{W'}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min((g-g^*)(x) (f-g^*)(x) : x \in M_{f-g^*}) \leq 0 \text{ für } g \in W'.$$

1.3. Das Peetre'sche K-Funktional

Ein Maß für die Glätte einer Funktion $f \in C(X)$ geben die klassischen Glättemoduln (siehe Lorentz, 1966)

$$\omega_r(f; \delta) = \sup \left(\left| \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+kh) \right| : x, x+rh \in X, |h| \leq \delta \right),$$

$$\delta > 0, r \in \mathbb{N},$$

und das Peetre'sche K-Funktional

$$K_r(t; f) = \inf (\|f - g\|_{\infty} + t \|g^{(r)}\|_{\infty} : g \in C^{(r)}(X)),$$

$$t > 0, r \in \mathbb{N}.$$

Für $f \in C(X)$ ist $t \mapsto K_r(t; f)$ eine isotone, konkave Funk-

tion mit

$$\lim_{t \rightarrow 0+} K_r(t; f) = 0 \quad \text{und}$$

$$K_r(t; f) \leq \begin{cases} \|f\|_\infty & , f \in C(X) \\ t \|f^{(r)}\|_\infty & , f \in C^{(r)}(X) \end{cases} \quad , t > 0$$

Weiter ist für $t > 0$ die Funktion $f \rightarrow K_r(t; f)$ eine Halbnorm auf $C(X)$, und mit den (nicht notwendig konkaven) Glättemoduln gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{2^r} \omega_r(f; \delta) \leq K_r((\delta/2)^r; f) \leq 2^{r+1} \omega_r(f; \delta/2) \quad , \delta > 0.$$

Wir werden in den Kapiteln 2 und 3 näher auf diese Äquivalenz eingehen.

Für $r=1$ gilt schärfer der folgende

Satz von Korneitschuk-Peetre.

$$K_1(t; f) = \frac{1}{2} \bar{\omega}_1(f; 2t) \quad , f \in C(X) \quad , t > 0,$$

wobei $\bar{\omega}_1(f; \cdot)$ die konkave Einhüllende von $\omega_1(f; \cdot)$ bezeichnet.

Ein kurzer Beweis findet sich in (Mitjagin-Semenov, 1977). Er beruht letztlich auf einer Charakterisierung der besten Approximation einer stetigen Funktion f durch W_1 , die N. P. Korneitschuk 1961 angegeben hat (siehe Korneitschuk, 1976, S. 225):

$$g^* \in P_{W_1}(f) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Es gibt ein Intervall $(\alpha, \beta) \subset X$, so daß g^* linear ist auf (α, β) mit Steigungskoeffizient $\gamma = \pm 1$ und

$$(g^* - f)(\alpha) = (f - g^*)(\beta) = \gamma \|f - g^*\|_\infty.$$

Wir werden in Kapitel 2 eine entsprechende Aussage

für $r > 1$ angeben, deren Beweis jedoch einigen Aufwand erfordert. Wir haben damit dann eine Möglichkeit, das K-Funktional einer stetigen Funktion exakt zu bestimmen:

Über die für $M > 0$ bestmögliche lineare Abschätzung nach oben

$$K_r(t;f) \leq d(f;W_r(M)) + M t =: y_M,$$

sowie

$$K_r(t;f) \leq E_{r-1}(f) \quad (\text{ bzw. } \leq E_0^*(f))$$

erhalten wir $K_r(t;f)$ als Einhüllende dieser Halbgeraden-schar.

1.4. Vorzeichenwechsel und Perfekt-Splines

Wir wollen in diesem Abschnitt noch einige Definitionen und einen Satz über Vorzeichenwechsel zusammenstellen, auf die wir in den folgenden Kapiteln immer wieder zurückkommen.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C(X)$. Wir sagen, daß f in X (mindestens) k Vorzeichenwechsel besitzt, falls eine endliche Folge

$$z_1 < z_2 < \dots < z_k < z_{k+1}$$

in X existiert mit

$$f(z_i)f(z_{i+1}) < 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq k.$$

Ist $x_i \in (z_i, z_{i+1})$, und gilt $f(x_i) = 0$, sowie $f(x) \neq 0$ auf (z_i, x_i) und auf (x_i, z_{i+1}) , so heißt x_i Wechselpunkt von f . Ist $f \in L_\infty(X)$, so besitzt f (in $(a,b) \subset X$) einen Vorzeichenwechsel (dem Maße nach), falls gilt:

Es existieren Mengen A, B von positivem Maß in (a, b) mit $A < B$ und $\varepsilon = \pm 1$, so daß

$$\varepsilon \cdot f(x) < 0 \text{ f.ü. auf } A \text{ und } \varepsilon \cdot f(x) > 0 \text{ f.ü. auf } B.$$

Hierbei verstehen wir unter $A < B$, daß $\sup A \leq \inf B$; entsprechend bedeutet $x < B$, daß $\{x\} < B$ für $x \in X$.

Ist $f \in L_{\infty}^{(r)}(X)$, so heißt f Perfekt-Spline mit genau k Knoten $y_1, \dots, y_k$, falls $f^{(r)}$ nur die Werte $+1$ und -1 annimmt und genau k Vorzeichenwechsel in X besitzt mit Sprungstellen $y_1, \dots, y_k$.

Im Zusammenhang mit dem Nullstellenverhalten von Funktionen werden wir immer wieder auf den Satz von Rolle zurückgreifen müssen (siehe Schumaker, 1975) :

Satz von Rolle.

Sei $[a, b]$ ein nicht-ausgeartetes kompaktes Intervall, und sei $f \in C([a, b]) \setminus \{0\}$ absolut stetig mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann besitzt f' mindestens einen Vorzeichenechsel in (a, b) . Ist f' stetig, so besitzt es mindestens einen Wechsellpunkt in diesem Intervall.

Schließlich bemerken wir noch, daß ein k -dimensionaler Teilraum G von $C(X)$ schwach-Tschebyschev-Raum heißt, falls jedes $g \in G$ höchstens $k-1$ Vorzeichenwechsel besitzt (siehe Karlin-Studden, 1966).

2. Beste Approximation durch W_r

2.1. Ein Charakterisierungssatz

Wir wollen in diesem Abschnitt die beste Approximation stetiger Funktionen $f \in C(I)$, $I = [-1, +1]$ durch W_r charakterisieren. Wir schicken voraus, daß die Existenz von Elementen bester Approximation $g^* \in P_{W_r}(f)$ in W_r durch die beschränkt-Kompaktheit dieser Klasse gesichert ist.

Der Charakterisierungs- und Eindeutigkeitsatz lautet nun wie folgt :

Satz 2.1. Sei $f \in C(I)$, $g^* \in W_r$, $r \geq 2$. Dann ist

$g^* \in P_{W_r}(f)$ genau dann, wenn gilt :

Es gibt ein Teilintervall $(\alpha, \beta) \subset I$ und ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq r+1$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind

(i) $g^*|_{[\alpha, \beta]}$ ist ein Perfekt-Spline mit genau $N-r-1$ Knoten

$$y_0 := \alpha < y_1 < y_2 < \dots < y_{N-r-1} < \beta =: y_{N-r}.$$

(ii) $f-g^*$ besitzt eine Alternante

$$\alpha = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_N = \beta$$

der Länge N .

(iii) $\xi_{i+1} < y_i < \xi_{i+r}, 1 \leq i \leq N-r-1.$

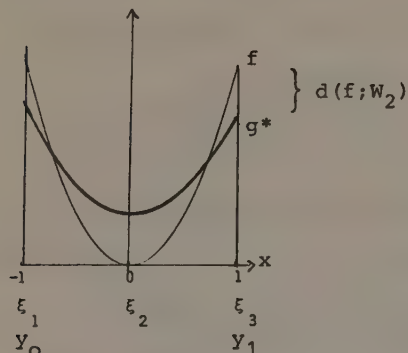
(iv) $g^{*(r)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}((f-g^*)(\xi_1)), & \text{f.ü. auf } (y_0, y_1), r \text{ gerade,} \\ -\operatorname{sgn}((f-g^*)(\xi_1)), & \text{f.ü. auf } (y_0, y_1), r \text{ ungerade.} \end{cases}$

Des weiteren ist g^* auf $[\alpha, \beta]$ eindeutig bestimmt.

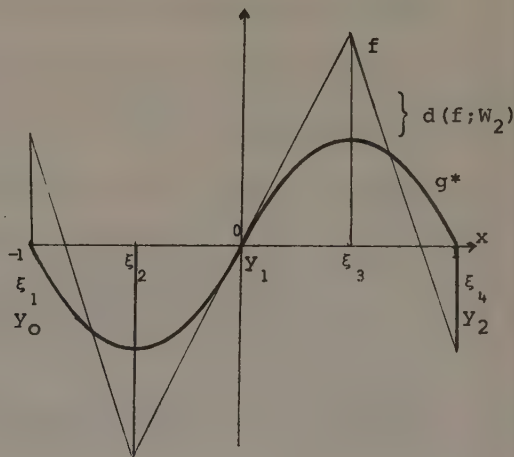
Bevor wir uns dem Beweis des Satzes zuwenden, wollen wir seine Aussage an zwei kleinen Beispielen illustrieren:

Beispiel 2.2. Sei $r=2$, $f(x) = x^2$, $g^*(x) = x^2/2 + 1/4$, $x \in I$. Dann ist $\{-1, 0, +1\}$ eine Alternante der Länge 3 von $f-g^*$ und $g^{**} = +1$ auf $(y_0, y_1) = (-1, +1)$, d.h. $g^* \in P_{W_2}(f)$.

ad 2.2.



ad 2.3.



Beispiel 2.3. Sei $r=2$, $f \in C(I)$ stückweise linear, definiert durch $f(-1) = \frac{1}{8}$; $f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$; $f(+1) = -\frac{1}{8}$.

Sei $g^* \in W_2$ definiert durch $g^*(x) = x(x+1)/2$ auf $[-1, 0]$ und $g^*(x) = -g^*(-x)$ auf $[0, +1]$. Dann ist $g^* \in P_{W_2}(f)$, denn

$\{-1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1\}$ ist eine Alternante der Länge 4 und $g^{**} = +1$ auf $(y_0, y_1) = (-1, 0)$. Die Überlappungseigenschaft (iii) ist wegen $\xi_2 = -\frac{1}{2} < y_1 = 0 < \xi_3 = +\frac{1}{2}$ erfüllt.

Eines unserer wesentlichen Hilfsmittel beim Beweis von

Satz 2.1. wird das nachstehende Lemma sein, welches auch unabhängig von dieser Anwendung von Interesse ist.

Zur leichteren Formulierung schicken wir eine Bemerkung voraus :

Bemerkung 2.4. Sei $h \in L_{\infty}^{(r)}(I)$, $r \in \mathbb{N}$ mit $h^{(j)}(-1) = 0$ für $1 \leq j \leq r-1$. Dann gilt nach dem Satz von Taylor

$$h(x) = \int_{-1}^{+1} h^{(r)}(t) g_r(x;t) dt, \quad x \in I,$$

mit dem Kern $g_r(x;t) = (x-t)_+^{r-1}/(r-1)!$, $(x,t) \in I \times I$.

Lemma 2.5. Seien $r, k \in \mathbb{N}$, $k \leq r \leq 2$, und seien $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < +1$. Seien weiter $B_1, \dots, B_{k+1-r}$ Mengen positiven Maßes in I mit $B_i < B_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-r$ und

$$x_i < B_i < x_{i+r-1}, \quad 1 \leq i \leq k+1-r,$$

und es seien $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k+1-r$ und $p_j \in L_{\infty}(I)$ mit

$$p_j(x) > 0 \text{ f.ü. auf } B_j \text{ und } p_j(x) = 0 \text{ sonst;}$$

definiere $u_j \in L_{\infty}^{(r)}(I)$ durch

$$u_j(x) := \int_{-1}^{+1} p_j(t) g_r(x;t) dt, \quad x \in I.$$

Dann ist $G := \text{span}\{1, x, \dots, x^{r-1}, u_1, \dots, u_{k+1-r}\}$

ein schwach-Tschebyschev-Raum der Dimension $k+1$, und es

gibt eine Funktion p^* in G , welche genau in $x_1, \dots, x_k$

einfache Nullstellen besitzt.

Beweis. Ist G kein schwach-Tschebyschev-Raum, so finden wir ein $g \in G$ mit mindestens $k+1$ Vorzeichenwechseln. Wenden wir den Satz von Rolle r -mal an, so stellen wir fest, daß $g^{(r)}$ in $(-1, +1)$ mindestens $k+1-r$ mal das Vorzeichen wechselt,

was unmöglich ist.

Um eine Funktion in G zu finden, welche in $x_1, x_2, \dots, x_k$ verschwindet, betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i u_i(x_j) &= 0, & 1 \leq j \leq k \\ \sum_{i=0}^k a_i u_i(-1) &= 1. \end{aligned}$$

Das System hat entweder eine eindeutige Lösung oder das zugehörige homogene System hat eine nicht-triviale Lösung; in beiden Fällen erhalten wir jedenfalls eine nicht-triviale Funktion g in G , die in den vorgeschriebenen Punkten verschwindet.

Wir wählen uns solch ein $g \in G$.

Wir wissen, daß es ein Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq k-1$, gibt, auf dem g nicht identisch verschwindet; denn andernfalls wäre g ein Polynom vom Grad $r-1$ mit höchstens $r-1 < k$ Nullstellen.

Es ist keine Einschränkung, anzunehmen, daß in jedem der Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ gilt:

$$\varepsilon_i g(x) \geq 0, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Wir nehmen, entgegen der Behauptung an, daß einer der Punkte $x_1, \dots, x_k$ keine einfache Nullstelle von g ist und unterscheiden zwei Fälle :

- I. g hat keine Nullstellenintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq k-1$ (aber möglicherweise Nullstellenintervalle $[-1, x_1]$, $[x_k, +1]$ oder $[a, b] \subset [x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq k-1$).
- II. g besitzt ein Nullstellenintervall $[x_i, x_{i+1}]$ für ein i , $1 \leq i \leq k-1$.

ad I. Nach Voraussetzung und dem Satz von Rolle hat g' in jedem der Intervalle (x_i, x_{i+1}) , $1 \leq i \leq k-1$, mindestens einen Vorzeichenwechsel mit zugehörigem Wechsellpunkt z_i .

Des weiteren finden wir einen kleinsten Index i_0 , $1 \leq i_0 \leq k$ derart, daß $g'(x_{i_0}) = 0$.

Ist jetzt $i_0 = 1$, so hat g'' mindestens $k-1$ Vorzeichenwechsel in (x_1, z_1) , $(z_1, z_2), \dots, (z_{k-2}, z_{k-1})$, was wieder der Satz von Rolle liefert; entsprechendes ergibt sich für den Fall $i_0 = k$.

Ist $1 < i_0 < k$, so hat g'' in $(z_1, z_2), \dots, (z_{i_0-1}, x_{i_0})$, $(x_{i_0}, z_{i_0}), \dots, (z_{k-2}, z_{k-1})$ mindestens $k-1$ Vorzeichenwechsel.

Wiederholte Anwendung des Satzes von Rolle ergibt, daß $g^{(r)}$ mindestens $k+1-r$ Vorzeichenwechsel besitzt, ein Widerspruch.

ad II.

Fall 1: Es gibt Indizes i_0, j_0 , $1 \leq i_0 < j_0 \leq k$, so daß x_{i_0} und x_{j_0} Nullstellen der Vielfachheit r von g sind, und daß $g(x) \neq 0$ auf (x_i, x_{i+1}) , $i_0 \leq i \leq j_0-1$.

Nach dem Satz von Rolle hat g' in (x_{i_0}, x_{j_0}) mindestens $j_0 - i_0$ Vorzeichenwechsel mit Wechsellpunkten $z_i^1 \in (x_i, x_{i+1})$, $i_0 \leq i \leq j_0-1$.

Haben wir eingesehen, daß $g^{(j)}$, $1 \leq j \leq r-1$ in (x_{i_0}, x_{j_0}) mindestens $j_0 - i_0 + j - 1$ Vorzeichenwechsel besitzt mit zugehörigen Wechsellpunkten z_i^j , $i_0 \leq i \leq j_0-1$, so stellen wir fest, daß $g^{(j+1)}$ in $(z_{i_0}^j, z_{j_0+1}^j)$ mindestens $j_0 - i_0 + j - 2$ Vorzeichenwechsel besitzt, und je einen in $(x_{i_0}, z_{i_0}^j)$ und $(z_{j_0-1}^j)$, so daß schließlich gilt :

$g^{(r)}$ hat in (x_{i_0}, x_{j_0}) mindestens $j_0 - i_0 + r - 1$ Vorzeichenwechsel, was unmöglich ist, denn (x_{i_0}, x_{j_0}) trägt höchstens falls die $j_0 - i_0 + r - 2$ (oder weniger) Mengen $B_{\max(1; i_0 + 2 - r)}$, ..., $B_{j_0 - 1}$.

Fall 2: Es gibt einen Index i_0 , $2 \leq i_0 \leq k-1$, so daß x_{i_0} eine Nullstelle der Vielfachheit r von g ist, und daß $g(x) \neq 0$ auf (x_i, x_{i+1}) für $i_0 \leq i \leq k-1$, beziehungsweise $1 \leq i \leq i_0 - 1$.

Sei ohne Einschränkung $g(x) \equiv 0$ auf $[0, x_{i_0}]$. Dann hat g' in (x_{i_0}, x_k) mindestens $k - i_0$ Vorzeichenwechsel mit Wendepunkt $z_{i_0}^1 \in (x_{i_0}, x_{i_0+1})$.

Folglich hat g'' in $(z_{i_0}^1, x_k)$ mindestens $k - i_0 - 1$ Vorzeichenwechsel, sowie eine in $(x_{i_0}, z_{i_0}^1)$, woraus sich für $g^{(r)}$ $k - i_0$ Vorzeichenwechsel in (x_{i_0}, x_k) ergeben. Aber (x_{i_0}, x_k) trägt maximal die $k - i_0$ (oder weniger) Mengen $B_{\max(1; i_0 + 2 - r)}$, ..., B_{k+1-r} .

Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes.

" $\Rightarrow$ " Sei $g^* \in P_{W_r}(f)$.

Wie im Beweis des Tschebyschev'schen Alternantensatzes (siehe Achieser, 1967) läßt sich die Existenz einer Alternante der Länge $r+1$ von $f-g^*$ zeigen.

Wir unterteilen $[-1, +1]$ dann in abgeschlossene Blöcke $d_1 < d_2 < \dots < d_{k+1}$ ($k \geq n$) von Alternantenpunkten von $f-g^*$, o.B.d.A. wie folgt :

d_1 enthält nur E^+ - Punkte (von $f-g^*$), $\xi_1^2 := \max d_1$ ist E^+ - Punkt und $\bar{d}_1 := [-1, \xi_1^2]$ enthält keinen E^- - Punkt.

d_j enthält nur $\left\{ \begin{matrix} E^- \\ E^+ \end{matrix} \right\}$ - Punkte, falls $j \in \left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}, 1 \leq j \leq k;$

$\xi_j^1 := \min d_j$ und $\xi_j^2 := \max d_j$ sind $\left\{ \begin{matrix} E^- \\ E^+ \end{matrix} \right\}$ - Punkte

und $\bar{d}_j := [\xi_j^1, \xi_j^2]$ enthält keinen $\left\{ \begin{matrix} E^+ \\ E^- \end{matrix} \right\}$ - Punkt.

d_{k+1} enthält nur $\left\{ \begin{matrix} E^+ \\ E^- \end{matrix} \right\}$ - Punkte, falls $k \in \left\{ \begin{matrix} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{matrix} \right\};$

$\xi_{k+1}^1 := \min d_{k+1}$ ist $\left\{ \begin{matrix} E^+ \\ E^- \end{matrix} \right\}$ - Punkt, und $\bar{d}_{k+1} := [\xi_{k+1}^1, +1]$

enthält keinen $\left\{ \begin{matrix} E^- \\ E^+ \end{matrix} \right\}$ - Punkt ,

und $[-1, +1] \setminus \bigcup_{j=1}^{k+1} \bar{d}_j$ enthält keine Alternantenpunkte von $f-g^*$.

Wir betrachten die folgende Annahme :

(A) Es gibt Mengen positiven Maßes $B_i \subset (\xi_i^2, \xi_{i+r}^1), 1 \leq i \leq k+1-r,$ so daß

$$(-1)^{i+r-1} g^*(r)(x) < 1 \text{ f.ü. auf } B_i, 1 \leq i \leq k+1-r$$

und $B_i \subset B_{i+1}, 1 \leq i \leq k-r.$

Ist die Annahme (A) erfüllt, so dürfen wir $x_i \in (\xi_i^2, \xi_{i+1}^1), 1 \leq i \leq k,$ wählen, mit der Eigenschaft, daß

$$x_i < B_i < x_{i+r-1}, 1 \leq i \leq k+1-r.$$

Seien für $1 \leq i \leq k+1-r$ Funktionen $p_i \in L_\infty(I)$ definiert durch

$$p_i(x) := \begin{cases} (-1)^{r+i-1} - g^{*(r)}(x) & , \text{ auf } B_i \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann finden wir nach Lemma 2.5. eine Funktion $p^* \in L_\infty^{(r)}(I)$, die genau k einfache Nullstellen in $x_1, \dots, x_k$ besitzt.

Wir dürfen annehmen, daß $p^* > 0$ auf $\bar{d}_1$. (Andernfalls nehmen wir $p^{**} = -p^*$)

Damit erhalten wir nach Konstruktion für $\delta > 0$ hinreichend klein :

$$g^* + \delta p^* \in W_r \quad \text{und} \quad \|f - (g^* + \delta p^*)\|_\infty < \|f - g^*\|_\infty,$$

ein Widerspruch.

Somit gilt (A) nicht, und wir erhalten die Bedingungen des Satzes durch Induktion.

Sei $k = r$; dann gilt $(-1)^r g^{*(r)}(x) = 1$ f.ü. auf (ξ_1^2, ξ_{r+1}^1) , so daß die Bedingungen (i) - (iv) gelten mit $N = r+1 = k+1$.

Sei $k = r+1$; dann gilt

$$(-1)^r g^{*(r)}(x) = 1 \quad \text{f.ü. auf } (\xi_1^2, \xi_{r+1}^1),$$

was die Bedingungen (i) - (iv) mit $N = r+1 = k$ liefert; oder

$$(-1)^{r+1} g^{*(r)}(x) = 1 \quad \text{f.ü. auf } (\xi_2^2, \xi_{r+2}^1),$$

was ebenfalls die Bedingungen (i) - (iv) liefert mit $N = r+1 = k$; oder aber wir finden ein $y_1 \in (\xi_2^2, \xi_{r+1}^1)$, so daß gilt :

$$(-1)^r g^{*(r)}(x) = 1 \quad \text{f.ü. auf } (\xi_1^2, y_1)$$

und

$$(-1)^{r+1} g^{*(r)}(x) = 1 \quad \text{f.ü. auf } (y_1, \xi_{r+2}^1);$$

dies sind die Bedingungen (i) - (iv) mit $N = r+2 = k+1$.

Ist nun $k > r$ beliebig, so existieren entweder Punkte

$$\xi_1^2 =: y_0 < y_1 < \dots < y_{k-r} < y_{k+1-r} := \xi_{k+1}^1$$

mit

$$y_j \in (\xi_{j+1}^2, \xi_{j+r}^1), \quad 1 \leq j \leq k-r,$$

so daß gilt

$$(-1)^{i+r} g^{*(r)}(x) \equiv 1 \quad \text{f.ü. auf } (y_i, y_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq k-r,$$

was die Bedingungen (i) - (iv) liefert mit $N = k+1 \geq r+1$;

oder aber wir können uns auf $[-1, \xi_k^1]$ beziehungsweise $[\xi_2^2, +1]$ zurückziehen, und finden dort (i) - (iv) für ein $N \leq k$ erfüllt.

" $\Leftarrow$ " Sei umgekehrt (i) - (iv) erfüllt für ein $g^* \in W_r$, welches nicht Element bester Approximation von f in W_r ist.

Dann finden wir nach dem Kolmogorov-Kriterium für konvexe Mengen eine Funktion $g^{**} \in W_r$ mit der Eigenschaft, daß

$$(f - g^*)(\xi_i) (g^{**} - g^*)(\xi_i) > 0, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Wir dürfen annehmen, daß ξ_1 ein E^+ -Punkt von $f - g^*$ ist, was

$$(-1)^{i+1} (g^{**} - g^*)(\xi_i) > 0, \quad 1 \leq i \leq N,$$

liefert.

Wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt nun, wenn wir $h := g^{**} - g^*$ setzen :

Es gibt

$$\eta_i^{(1)} \in (\xi_i, \xi_{i+1}) \quad \ni \quad (-1)^i h'(\eta_i^{(1)}) > 0, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

und für $1 \leq j \leq r-2$ gibt es

$$\eta_i^{(j+1)} \in (\eta_i^{(j)}, \eta_{i+1}^{(j)}) \subset (\xi_i, \xi_{i+j+1}) \quad \ni \quad (-1)^{i+j} h^{(j+1)}(\eta_i^{(j+1)}) > 0, \\ 1 \leq i \leq N-j-1.$$

Wegen der absoluten Stetigkeit von $h^{(r-1)}$ finden wir Mengen positiven Maßes

$$B_i < B_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq N-r-1,$$

so daß

$$B_i \subset (\xi_i, \xi_{i+1})$$

und

$$(-1)^{i+r+1} h^{(r)}(x) > 0 \quad \text{f.ü. auf } B_i, \quad 1 \leq i \leq N-r.$$

Ein induktives Argument führt nun zum Widerspruch.

Falls $B_1 < y_1$, so haben wir

$$(+) \quad 1 \geq g^{** (r)}(x) = g^{* (r)}(x) + h^{(r)}(x) > 1 \quad \text{f.ü. auf } B_1, \\ \text{falls } r \text{ gerade,}$$

oder

$$(++) \quad -1 \leq g^{** (r)}(x) = g^{* (r)}(x) + h^{(r)}(x) < -1 \quad \text{f.ü. auf } B_1, \\ \text{falls } r \text{ ungerade;}$$

ein Widerspruch, oder aber $B_2 > y_1$.

Wir nehmen an, daß $1 < i_0 \leq N-r-1$, und daß wir keinen Widerspruch auf $B_1, \dots, B_{i_0-1}$ erhalten haben; dann ist $B_{i_0} > y_{i_0-1}$.

Ist nun $B_{i_0} < y_{i_0}$, so erhalten wir über (+) oder (++) einen Widerspruch auf B_{i_0} ; andernfalls haben wir $B_{i_0+1} > y_{i_0}$.

Haben wir schließlich den Index $N-r-1$ erreicht, ohne einen Widerspruch erhalten zu haben, so gilt

$$y_{N-r-1} < B_{N-r} < y_{N-r} = \beta.$$

Aber

$$(-1)^{N+1} h^{(r)}(x) > 0 \quad \text{auf } B_{N-r},$$

was (+) auf B_{N-r} ergibt, falls N ungerade, oder (++) auf B_{N-r} , falls N gerade, womit die Hinlänglichkeit der Bedingungen (i) - (iv) gezeigt ist.

Die Eindeutigkeit von g^* auf $[\alpha, \beta]$ läßt sich wie folgt beweisen :

Seien $g^*, g^{**} \in W_r$ zwei Elemente bester Approximation von f in W_r , und erfülle g^* die Bedingungen (i) - (iv) auf $[\alpha, \beta]$. Sei ohne Einschränkung ξ_1 ein E^+ -Punkt von $f - g^*$.

Dann haben wir :

$$(-1)^{i+1} (f - g^{**})(\xi_i) \leq (-1)^{i+1} (f - g^*)(\xi_i), \quad 1 \leq i \leq N,$$

oder mit $h := g^{**} - g^*$:

$$(-1)^{i+1} h(\xi_i) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Wir behaupten, daß

$$h(x) = 0 \quad \text{auf} \quad [\xi_1, \xi_N].$$

Für $1 \leq i \leq N-1$ haben wir entweder

$$h(x) = 0 \quad \text{auf} \quad [\xi_i, \xi_{i+1}]$$

oder

$$h' \text{ besitzt einen Vorzeichenwechsel auf } (\xi_i, \xi_{i+1}).$$

Besitzt h kein Nullstellenintervall, so erhalten wir einen Widerspruch wie in Teil " $\Leftarrow$ " des Beweises.

Wir nehmen deshalb an, daß h ein Nullstellenintervall besitzt.

Fall 1: Es gibt Indizes $i_0, j_0 \in \{1, \dots, N\}$, $i_0 < j_0$, so daß ξ_{i_0} und ξ_{j_0} Nullstellen der Vielfachheit r von h sind, und daß $h(x) \neq 0$ auf (ξ_i, ξ_{i+1}) , $i_0 \leq i \leq j_0 - 1$.

Dann hat $h^{(r)}$ wie im Beweis von Lemma 2.5. mindestens $j_0 - i_0 + r - 1$ Vorzeichenwechsel in (ξ_{i_0}, ξ_{j_0}) . Aber (ξ_{i_0}, ξ_{j_0}) enthält höchstens $j_0 - i_0 + r - 2$ Knoten y_i von g^* , so daß wir ein Knotenintervall Y finden mit der Eigenschaft:

$h^{(r)}(x) > 0$ auf einer Menge positiven Maßes $C_1 \subset Y$
und

$h^{(r)}(x) < 0$ auf einer Menge positiven Maßes $C_2 \subset Y$,
womit wir Widerspruch (+) oder (++) auf C_1 beziehungsweise
 C_2 erhalten.

Fall 2 : h hat nur ein Nullstellenintervall $[\xi_{i_0}, \xi_{j_0}]$, und
für $i \leq i_0 - 1$, $i \geq j_0$ verschwindet h nicht iden-
tisch auf $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Wir erhalten wieder einen Widerspruch wie im Lemma 2.5.
entsprechend Fall 1 oben.

Damit ist Satz 2.1. vollständig bewiesen.

2.2. Anwendungen des Charakterisierungssatzes

Als Anwendung von Satz 2.1. bestimmen wir das zweite K-
Funktional einiger Funktionen.

Beispiel 2.6. Sei $f(x) := x^{3/2}$ für $x \in [0, 1]$,
und sei für $0 < M < \infty$

$$g_M(x) := \begin{cases} M x^{2/2} + x/2M - (64 M^3)^{-1}, & x \in [0, \frac{1}{M^2}], \\ x^{3/2} - (64 M^3)^{-1}, & x \in [\frac{1}{M^2}, 1]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$g_M \in W_2^{(M)}[0, 1] = \{g \in L_\infty^2[0, 1] : \|g''\|_\infty \leq M\},$$

und wir haben

$$g_M''(x) = M, \quad \text{auf } [0, \frac{1}{M^2}], \quad g_M''(x) \leq M, \quad \text{auf } [\frac{1}{M^2}, 1].$$

sowie

$$\|f - g_M\|_\infty = (f - g_M)(0) = (g_M - f)(\frac{1}{4M^2}) = (f - g_M)(\frac{1}{M^2}) = \frac{1}{64M^3};$$

das heißt, nach Satz 2.1. gilt bestmöglich für $M > 0$

$$K_2(t;f) \leq \frac{1}{64 M^3} + M t, \quad t > 0.$$

Die Kurvenschar $((64 M^3)^{-1} + M t)_M > 0$ hat als

Einhüllende die Funktion

$$y(t) = 3^{-3/4} 2^{1/2} t^{3/4}, \quad t > 0.$$

Setzen wir weiter $g_0(x) := x - 2/3^3$, $x \in [0,1]$,

so gilt

$$E_1(f) = \|f - g_0\|_\infty = (f - g_0)(0) = (g_0 - f)(\frac{4}{9}) = (f - g_0) = \frac{2}{3^3},$$

so daß wir bestmöglich haben

$$K_2(t;f) \leq \frac{2}{3^3},$$

und damit insgesamt

$$K_2(t;f) = \begin{cases} 3^{-3/4} \cdot 2^{1/2} \cdot t^{3/4} & , 0 \leq t \leq 2^{2/3} 3^{-3}, \\ 2 \cdot 3^{-3} & t \geq 2^{2/3} 3^{-3}. \end{cases}$$

Ein Vergleich mit dem zweiten Glättemodul liefert :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \omega_2(f;t) &= \frac{1}{4} (2^{3/2} - 2) t^{3/2} < K_2(\frac{t}{2};f) = \\ &= \frac{1}{2} 3^{-3/4} t^{3/2} = \frac{1}{2} 3^{-3/4} \frac{\sqrt{2}+1}{2} \omega_2(f;t) < \frac{1}{4} \cdot 1.06 \omega_2(f;t), \\ &0 < t \leq 2^{4/3} 3^{-3/2}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.7. Sei für $0 < \alpha < 2$

$$f(x) := |x|^\alpha, \quad x \in [-1, +1].$$

Dann gilt zunächst bestmöglich mit $g(x) := \frac{1}{2}$, $x \in [-1, +1]$:

$$K_2(t;f) \leq \|f - g\|_\infty + t \|g''\|_\infty = \frac{1}{2},$$

$$\text{denn } (f - g)(-1) = (g - f)(0) = (f - g)(+1) = \frac{1}{2}.$$

Andererseits gilt für $\alpha \leq M < \infty$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_M = \frac{1}{4} (2-\alpha) \left(\frac{\alpha}{M}\right)^{\alpha/(2-\alpha)}$$

für $g_M \in W_2(M)$, definiert durch

$$g_M(x) := \begin{cases} M x^2/2 + \varepsilon_M & , 0 \leq |x| \leq \left(\frac{\alpha}{M}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}} =: t_M \\ |x|^\alpha - \varepsilon_M & , t_M \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

daß $g_M \in W_2(M)$ und $g_M \in P_{W_2(M)}(f)$ nach Satz 2.1., da

$$(f - g_M)(\pm t_M) = (g_M - f)(0) = \|f - g_M\|_\infty = \varepsilon_M,$$

so daß bestmöglich gilt

$$K_2(t;f) \leq \frac{1}{4} (2-\alpha) \left(\frac{\alpha}{M}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + M t, \quad t > 0.$$

$$\text{Über} \quad \frac{\partial}{\partial M} (\varepsilon_M + M t) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{M}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} + t = 0$$

erhalten wir als Einhüllende der Kurvenschar, die $K_2(\cdot;f)$ bestmöglich majorisiert, die Funktion

$$y(t) = 2^{\alpha-1} t^{\frac{\alpha}{2}},$$

und insgesamt

$$K_2(t;f) = \begin{cases} 2^{\alpha-1} t^{\frac{\alpha}{2}} & , 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} & , t \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ein Vergleich mit dem zweiten Glättemodul ergibt

$$\frac{1}{4} \omega_2(f;t) = \frac{1}{2} t^\alpha = K_2\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2;f\right) = 2^{-1} t^\alpha.$$

2.3. Eine Teilcharakterisierung für W_2^*

Für periodische Funktionen $f \in C(\pi)$ haben wir keinen Charakterisierungssatz entsprechend 2.1. gefunden.

Sind die dort angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen (i)-(iv) auf einem Intervall $[\alpha, \beta] \subset \pi$ erfüllt, so ergibt sich für $X = \pi$ mit demselben Beweis wie im Falle $X = [-1, +1]$ deren Hinlänglichkeit dafür, daß ein $g^* \in W_I^*$ Element bester Approximation von f in W_I^* ist.

Umgekehrt können wir für ein $g^* \in P_{W_I^*}(f)$ nur die Existenz von zwei Alternantenpunkten für $f-g^*$ nachweisen und auch Beispiele angeben, daß unter gewissen Zusatzbedingungen die Existenz von zwei Alternantenpunkten von $f-g^*$ hinreichend für $g^* \in P_{W_I^*}(f)$ ist.

Diese Zusatzbedingungen werden zeigen, daß ein Element bester Approximation von f in W_I^* durch eine Alternanten- und Perfekt-Spline-Bedingung nicht charakterisiert werden kann.

Genauer werden wir in einem Teilresultat für einfachste Perfekt-Splines in W_2^* zeigen, daß zusätzlich zur Existenz von mindestens zwei Alternantenpunkten eine Aussage über die Lage der Alternantenpunkte benötigt wird.

Hierzu sei $f \in C(\pi)$ fest gewählt. Sei $g^* \in W_2^*$ ein Perfekt-Spline mit

$$g^*(x) = -1 \quad \text{auf} \quad (-\pi, 0) ; \quad g^*(x) = +1 \quad \text{auf} \quad (0, \pi).$$

Wir setzen voraus, daß f und g^* nicht den Bedingungen

aus 2.1. genügen, und daß $f-g^*$ eine Alternante der Länge 2 besitzt.

Wir setzen weiter voraus, daß ein E^+ -Punkt von $f-g^*$ in $(-\pi, 0)$ liegt und ein E^- -Punkt von $f-g^*$ in $(0, \pi)$; denn sonst läßt sich sofort eine bessere Approximation von f in W_2^* angeben.

Schließlich dürfen wir annehmen, daß die E^+ - und die E^- -Punkte in zwei disjunkten, minimalen Teilintervallen d_1, d_2 von Π enthalten sind; das heißt, es existieren Punkte

$$z_1 \leq z_2 < z_3 \leq z_4 < z_1 + 2\pi$$

in Π derart, daß z_1 und z_2 E^+ -Punkte, sowie z_3 und z_4 E^- -Punkte von $f-g^*$ sind, daß $d_1 := [z_1, z_2]$ keine E^- -Punkte, sowie $d_2 := [z_3, z_4]$ keine E^+ -Punkte enthält, und daß $\Pi \setminus (d_1 \cup d_2)$ keine Extrempunkte von $f-g^*$ enthält.

Ist dies nämlich nicht möglich, so liegt einer der Fälle aus 2.1. vor.

Mit den angegebenen Voraussetzungen haben wir die

Proposition 2.8. g^* ist Element bester Approximation von f in W_2^* genau dann wenn gilt :

Es existieren Punkte $x_1 \in d_1$ und $x_2 \in d_2$ mit

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Beweis. Sei $g^* \in P_{W_2^*}(f)$, und sei die angegebene Bedingung nicht erfüllt.

Dann gilt entweder

$$0 < d_1 + d_2 < 2\pi \quad \text{oder}$$

$$-2\pi < d_1 + d_2 < 0.$$

Sei o.B.d.A. $0 < x + y < 2\pi$ für $x \in d_1$, $y \in d_2$, und

sei

$$\min d_1 + \min d_2 > a > 0,$$

$$\max d_1 + \max d_2 < 2\pi - a < 2\pi.$$

Dann gilt insbesondere

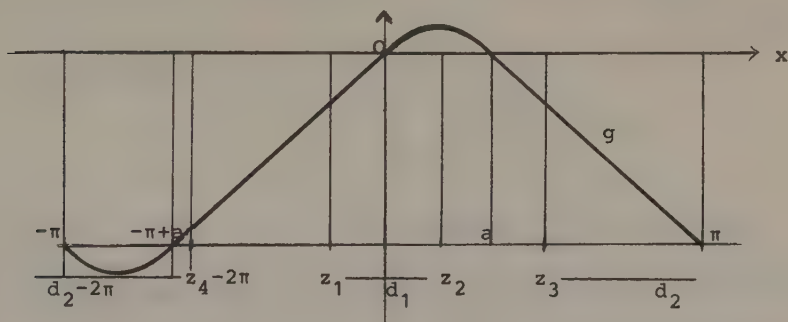
$$\min d_1 > -\pi + a,$$

sowie

$$\min d_2 > a.$$

Wir wählen $g \in L^2_\infty(\pi)$ durch

$$g(x) := \begin{cases} (x+a)(x+\pi-a) + a(a-\pi) & , x \in [-\pi, -\pi+a], \\ ax & , x \in [-\pi+a, 0], \\ -x(x-a) & , x \in [0, a], \\ -a(x-a) & , x \in [a, \pi]. \end{cases}$$



Dann gilt für

$$\begin{aligned} x \in d_1 \cap [-\pi, 0] : & \quad g(x) \geq g(\min d_1) = a \min d_1 = a z_1, \\ x \in d_1 \cap [0, \pi] : & \quad g(x) > g(\min d_2) = -a \min d_2 = -a z_3, \\ y \in d_2 \cap [0, \pi] : & \quad g(y) \leq g(\min d_2) = -a z_3, \\ y \in d_2 \cap [\pi, 2\pi] : & \quad g(y) < g(\min d_1) = a z_1. \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt für $x \in d_1$, $y \in d_2$:

$$g(x) - g(y) > 0.$$

Das heißt weiter, daß wir ein $c > 0$ finden, so daß für

$$p(x) := g(x) + c, \quad x \in \Pi,$$

gilt :

$$p(x) > 0 \text{ auf } d_1, \quad p(x) < 0 \text{ auf } d_2.$$

Somit gilt für $\delta > 0$ hinreichend klein

$$g^{**} := g^* + \delta p \in W_2^*$$

und

$$\min_{x \in M_{f-g^*}} (f-g^*)(x) \cdot (g^{**}-g^*)(x) > 0,$$

im Widerspruch zum Kolmogorov-Kriterium.

" ← " Wir zeigen zunächst die folgende Hilfsbehauptung:

Behauptung: Seien $x_1 \in (-\pi, 0)$, $x_2 \in (0, \pi)$ mit $x_1 + x_2 = 0$.

Dann gibt es kein $h \in L_\infty^2(\Pi) \setminus \{0\}$, für das gilt:

$$h''(x) \geq 0 \text{ auf } (-\pi, 0)$$

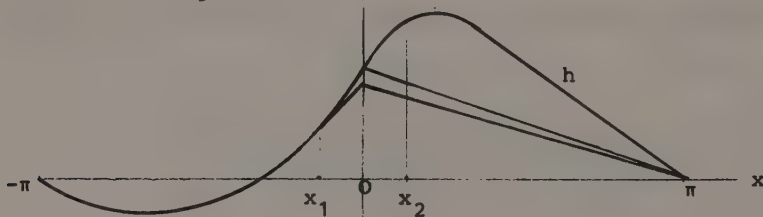
$$h''(x) \leq 0 \text{ auf } (0, \pi)$$

$$h(-\pi) = 0 \quad \text{und}$$

$$h(x_1) > h(x_2).$$

Beweis. Da h 2π -periodisch ist und nicht identisch verschwindet, haben wir $h'(-\pi) < 0$.

Wir dürfen annehmen, daß $h(x_1) \geq 0$ (ansonsten argumentieren wir analog von rechts).



Da h auf $(-\pi, 0)$ konvex ist, haben wir

$$h(0) \geq h(x_1) - x_1 h'(x_1).$$

Da h auf Π differenzierbar und auf $(0, \pi)$ konkav ist mit $h(\pi) = 0$, liegt h echt oberhalb der Geraden

$$h(0) - \frac{h(0)}{\pi} x, \quad x \in (0, \pi),$$

das heißt

$$h(x_2) > h(x_1),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Seien also jetzt $x_1 \in d_1$, $x_2 \in d_2$ mit $x_1 + x_2 = 0$, und sei g^* nicht Element bester Approximation von f in W_2^* . Wir dürfen nach Voraussetzung annehmen, daß $x_1 \in (-\pi, 0)$ und $x_2 \in (0, \pi)$.

Wir finden dann eine Funktion g^{**} in W_2^* mit

$$(g^{**} - g^*)(x) > 0 \quad \text{auf } d_1 \cap M_{f-g^*}$$

$$\text{und} \quad (g^{**} - g^*)(x) < 0 \quad \text{auf } d_2 \cap M_{f-g^*}.$$

Setzen wir $g := g^{**} - g^*$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz $y_1 \in (z_2, z_3)$ mit $g'(y_1) < 0$, sowie $y_2 \in (z_4, z_1 + 2\pi)$ mit $g'(y_2) > 0$.

Wir finden schließlich wegen der absoluten Stetigkeit von g' Mengen positiven Maßes $B_1 \subset (y_1, y_2)$, $B_2 \subset (y_2, y_1 + 2\pi)$ mit

$$g''(x) > 0 \quad \text{auf } B_1 \quad \text{und} \quad g''(x) < 0 \quad \text{auf } B_2.$$

Hat nun B_1 mit $(0, \pi)$ oder B_2 mit $(-\pi, 0)$ einen Durchschnitt nicht-verschwindenden Maßes (in Π), so erhalten wir Widerspruch (+) oder (++) wie im Beweis von Satz 2.1.

Oder aber wir haben $B_1 \subset (-\pi, 0)$ und $B_2 \subset (0, \pi)$ (bis

auf Nullmengen) , und das heißt

$$g''(x) \geq 0 \text{ auf } (-\pi, 0) \text{ und } g''(x) \leq 0 \text{ auf } (0, \pi).$$

Da $g(x) > 0$ auf $d_1 \cap M_{f-g^*}$ und $g(x) < 0$ auf $d_2 \cap M_{f-g^*}$, liefert die oben gezeigte Behauptung einen Widerspruch.

Zur Illustration wollen wir noch drei Beispiele angeben:

Beispiel 2.9. Sei $g^* \in W_2$ definiert durch

$$g^*(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2} x (x + \pi) & , x \in [-\pi, 0], \\ \frac{1}{2} x (x - \pi) & , x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Seien $f_1, f_2, f_3 \in C(\pi)$ stückweise linear, definiert durch

$$f_i(-\pi) = f_i(0) = f_i(\pi) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$f_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8} + 1.$$

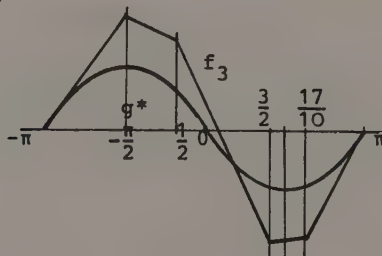
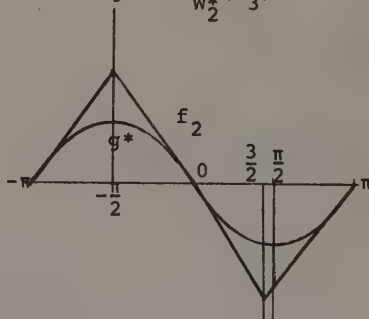
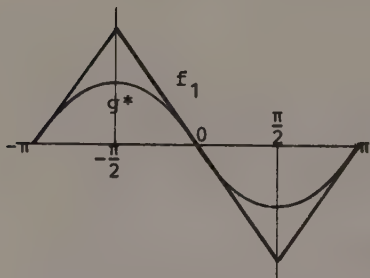
$$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} - \pi\right) - 1.$$

$$f_3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \left(\pi - \frac{1}{2}\right) + 1; \quad f_3\left(\frac{3}{2}\right) = f_2\left(\frac{3}{2}\right) \text{ und}$$

$$f_3\left(\frac{17}{10}\right) = \frac{17}{20} \left(\frac{17}{10} - \pi\right) - 1.$$

Dann gilt nach 2.8.

$$g^* \in P_{W_2}^*(f_1), \quad g^* \notin P_{W_2}^*(f_2) \quad \text{und} \quad g^* \in P_{W_2}^*(f_3).$$



2.4. Anwendungen

Die folgenden Beispiele werden zeigen, daß wir bei der Bestimmung des zweiten K-Funktional einer symmetrischen, periodischen Funktion mit Satz 2.1. und Proposition 3.2. auskommen.

Beispiel 2.10. Sei $x_0 := \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}}$, und sei $f \in W_2^*$

definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2/2 - 1/4 - \pi^2/16, & |x| \in [0, x_0], \\ x_0(|x| - x_0) + x_0^2/2 - 1/4 - \pi^2/16, & |x| \in [x_0, \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

sowie

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \pi.$$

Dann gilt

$$K_2(t; f) \leq 0 + t \|f''\|_\infty = t, \quad t > 0,$$

und wegen 3.2. mit

$$g^*(x) := x^2/4 - \pi^2/16, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}],$$

$$g^*\left(\frac{\pi}{2} + x\right) := g^*\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \pi.$$

bestmöglich

$$K_2(t; f) \leq 1/4 + t \|g^{**}\|_\infty = 1/4 + t/2, \quad t \geq 0,$$

$$\text{sowie } K_2(t; f) \leq \|f\|_\infty = 1/4 + \pi^2/16, \quad t \geq 0.$$

Mit einem kleinen Vorgriff auf den Satz von Favard und Achieser-Krein (3.1.) haben wir:

$$E_0(f) = \|f\|_\infty \leq K_2(\pi^2/8; f) \leq 1/4 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{16},$$

und damit insgesamt:

$$K_2(t; f) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1/2], \\ 1/4 + t/2, & t \in [1/2, \pi^2/8], \\ 1/4 + \pi^2/16, & t \in [\pi^2/8, \infty). \end{cases}$$

Um einiges interessanter sind die folgenden Beispiele (vgl. 2.7.).

Beispiel 2.11. Seien $0 < \alpha < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 := \alpha \frac{\pi}{n} 2^{-(1+\frac{1}{\alpha})/2}$
und $A := (n/\pi)^{2-2\alpha} 2^{-3\alpha} (1-2^{1-\alpha}) \cdot (2^{-1} - \alpha^{-(1+1/\alpha)})^{-2}$.

Sei $f := f_{n,\alpha} \in C(\Pi)$ definiert durch

$$f(x) := 2^{1-2\alpha} |x|^{2\alpha} - \left(\frac{\pi^2}{8n^2} \right)^\alpha + A(|x| - x_0)_+^2, \quad 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2n},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2n} + x\right) := -f\left(\frac{\pi}{2n} - x\right), \quad f(x) = f(-x), \quad x \in \Pi.$$

Dann gilt nach dem Tschebyschev'schen Alternantensatz und wie oben nach dem Satz von Favard und Achieser-Krein:

$$E_{n-1}^*(f) = \left(\frac{\pi^2}{8n^2} \right)^\alpha \leq K_2(\pi^2/8n^2; f) \leq \|f\|_\infty = \left(\frac{\pi^2}{8n^2} \right)^\alpha.$$

Wir setzen für $M > 0$

$$\varepsilon_M := (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{M} \right)^\alpha \quad \text{und} \quad t_M := 2 \left(\frac{\alpha}{M} \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}.$$

Ist $M_0 > 0$ so gewählt, daß

$$t_{M_0} \geq \alpha \frac{\pi}{n} 2^{-(1+\frac{1}{\alpha})/2} = x_0,$$

$$M_0/2 \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 + \varepsilon_{M_0} - \left(\frac{\pi^2}{8n^2} \right)^\alpha \geq 0 \quad \text{und}$$

$$|f''(x_0)| \leq M_0,$$

so setzen wir für $M \geq M_0$

$$g_M(x) := \begin{cases} \frac{M}{2} x^2 + \varepsilon_M - \left(\frac{\pi^2}{8n^2} \right)^\alpha, & 0 \leq |x| \leq t_M, \\ f(x) - \varepsilon_M, & t_M \leq |x| \leq x_0, \\ f(x) - \varepsilon_M + B(|x| - x_0)^2, & x_0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2n}, \end{cases}$$

und

$$g_M\left(\frac{\pi}{2n} + x\right) := g_M\left(\frac{\pi}{2n} - x\right) \quad , \quad x \in \Pi \quad ,$$

wobei

$$A \leq B < 0$$

so gewählt ist, daß $g_M\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0$.

Dann ist $\{-t_M, 0, +t_M\}$ eine Alternante der Länge 3 von $f - g_M$ mit $g_M''(x) = +M$ auf $(-t_M, +t_M)$, so daß nach 2.1. bestmöglich gilt :

$$K_2(t; f) \leq \varepsilon_M + M t \quad , \quad t > 0,$$

oder über Einhüllendenbildung wie in 2.7.

$$K_2(t; f) \leq t^\alpha \quad , \quad t > 0,$$

mit Gleichheit für $0 < t = t(M) \leq t(M_0)$.

3. Intermediäre Approximation in $C(X)$

3.1. Die Ergebnisse von Favard, Achieser-Krein und Korneitschuk

Im Jahre 1937 konnten J. Favard, sowie N. I. Achieser und M. G. Krein unabhängig voneinander die beste Approximation der Klassen W_r^* durch trigonometrische Polynome bestimmen (siehe, auch für das folgende, Lorentz, 1966 oder Korneitschuk, 1976). Sie bewiesen den folgenden

Satz 3.1. (von Favard, Achieser-Krein)

Seien $r, n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq r-1$. Dann gilt

$$E_{n-1}^*(W_r^*) = \frac{\mathcal{X}_r}{n^r},$$

mit den Favardkonstanten

$$\mathcal{X}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (r+1)}{(2j+1)^{r+1}}.$$

Extremale Funktionen in W_r^* sind die Favard'schen Perfekt-Splines

$$f_{nr}(x) = \frac{4}{\pi n^r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin [(2j+1)nx - \pi r/2]}{(2j+1)^{r+1}},$$

welche an $2n$ äquidistanten Punkten in Π alternierend

die Werte $+\frac{\mathcal{X}_r}{n^r}$ und $-\frac{\mathcal{X}_r}{n^r}$ annehmen. Es gilt

$$1 < \mathcal{X}_2 = \frac{\pi^2}{8} < \mathcal{X}_4 < \dots < \frac{4}{\pi} < \dots < \mathcal{X}_3 = \frac{\pi^3}{24} < \mathcal{X}_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ausgehend von den Ergebnissen von Favard, Achieser-Krein bestimmte N. P. Korneitschuk in einer Reihe von Arbeiten in den Jahren 1961 - 1970 die beste Approximation der Lipschitzklassen

zu einem K - Modul $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, das heißt, einer isotonen, konkaven Funktion ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta) = 0$; und zwar:

$$W_{rH_\omega} := \{f \in C^{(r)}(\Pi) : \omega(f^{(r)}; \delta) \leq \omega(\delta), \delta > 0\}.$$

Eines seiner wesentlichen Hilfsmittel war die Methode der intermediären Approximation, die wir in Abschnitt 3.2. ebenfalls verwenden werden:

Sind $W, W' \in C(\Pi)$, so erhält man durch Dazwischenschieben einer "intermediären" Funktionenklasse W'' mit bekannter bester Approximation in W' die Abschätzung

$$\delta(W; W') \leq \delta(W; W'') + \delta(W''; W'),$$

und wenn man W'' von einem Parameter $M > 0$ abhängen läßt

$$\delta(W; W') \leq \inf_{M>0} (\delta(W; W_M'') + \delta(W_M''; W')).$$

Insbesondere erhielt Korneitschuk für $W = W_{rH_\omega}$, $W' = J_{n-1}$ und $W_M'' = W_{r+1}^*(M)$ über Satz 3.1.

$$E_{n-1}^*(W_{rH_\omega}) \leq \inf_{M>0} (\delta(W_{rH_\omega}; W_{r+1}^*(M)) + M \frac{r+1}{n^{r+1}})$$

gute Abschätzungen nach oben und konnte zeigen:

Satz 3.2. (von Korneitschuk)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$E_{n-1}^*(W_{rH_\omega}) = E_{n-1}^*(g_{nr}(\omega; \cdot)) = \|g_{nr}(\omega; \cdot)\|_\infty,$$

wenn $g_{nr}(\omega; \cdot)$ die $\frac{2\pi}{n}$ - periodische Funktion auf Π ist, deren r -te Ableitung ungerade ist, und welche den Bedingungen

$$g_{nr}^{(r)}(\omega; x) = \begin{cases} \omega(2x)/2 & , \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n} , \\ \omega(\frac{2\pi}{n} - 2x)/2 & , \text{ für } \frac{\pi}{2n} \leq x \leq \frac{\pi}{n} , \end{cases}$$

derart genügen, daß die niedrigeren Ableitungen $g_{nr}^{(k)}(\omega; \cdot)$, $k=0,1,\dots,r-1$ auf jeder Periode Mittelwert Null haben.

Die Normen von $g_{nr}(\omega; \cdot)$ lassen sich induktiv bestimmen über

$$F_{n1}(x) = 1/2, \quad F_{nr}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{n}-x} F_{nr-1}(t) dt$$

und

$$\begin{aligned} \|g_{n0}(\omega; \cdot)\|_{\infty} &= \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \\ \|g_{nr}(\omega; \cdot)\|_{\infty} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \omega(t) F_{nr}\left(\frac{\pi}{n} - t\right) dt. \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß in Satz 3.2. für $r=0$ auch die stückweise linearen Funktionen in $C(\Pi)$

$$\begin{aligned} g_{n0}^*(\omega; x) &:= \frac{n}{\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) x, \quad -\frac{\pi}{2n} \leq x \leq \frac{\pi}{2n}, \\ g_{n0}^*\left(\omega; \frac{\pi}{2n} + x\right) &= g_{n0}^*\left(\omega; \frac{\pi}{2n} - x\right), \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

extremal sind, die für $r \geq 1$ entsprechend den g_{nr} aus g_{n0}^* konstruierten Funktionen für nicht-lineares ω jedoch nicht, wie man schon aus

$$E_{n-1}^*(W_1 H_{\omega}) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(t) dt$$

ablesen kann.

Wir halten fest, daß für $r = 1, 2, 3$ und die speziellen K -Moduln $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} E_{n-1}^*(W_0 H_{\omega}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ E_{n-1}^*(W_1 H_{\omega}) &= \frac{1}{4(1+\alpha)} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ E_{n-1}^*(W_2 H_{\omega}) &= \frac{1}{8(2+\alpha)} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2+\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3.2. Beste Approximation in V_{ω}^r

In Abschnitt 3.1. wurde aufgezeigt, daß für den allgemeinen Jackson-Satz

$$f \in C^{(k)}(\Pi) \Rightarrow E_{n-1}^*(f) \leq a_{r,k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \omega_r(f^{(k)}; \frac{\pi}{n}), \quad n \in \mathbb{N}$$

die Frage nach den besten Konstanten für den Fall $r=1$, $k=0,1,\dots$ und konkave Stetigkeitsmoduln beantwortet wurde. Das Problem für $r \geq 2$ ist offensichtlich schwierig; in der Literatur sind nicht einmal Ansätze einer Lösung zu finden.

Wir wollen in diesem Abschnitt für ein äquivalentes Problem die besten Konstanten bestimmen, indem wir statt der Glättemoduln die Peetreschen K-Funktionale benutzen. Das Problem reduziert sich dann zu der nur im Falle $r=1$ gelösten Frage nach der besten Konstanten auf der rechten Seite der Ungleichung

$$\frac{1}{2^r} \omega_r(f; \delta) \leq K_r(f; (\frac{\delta}{2})^2) \leq \text{konst.} \cdot \omega_r(f; \delta).$$

Die Konstante 2^{-r} auf der linken Seite ist bestmöglich.

Für einen K-Modul ω und $r \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Klassen

$$V_{\omega}^r := V_{\omega}^r(\Pi) := \{f \in C(\Pi) : K_r(t; f) \leq \omega(t), t > 0\}$$

und zeigen das folgende Resultat:

Satz 3.3. Sei ω ein K-Modul, und seien $r, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$E_{n-1}^*(V_{\omega}^r) = \omega(\mathcal{X}_r n^{-r})$$

mit den Favard-Konstanten $\mathcal{X}_r$.

Extremale Funktionen in V_{ω}^r sind gegeben durch

$$h_{nr}(\omega; x) := \mathcal{X}_r^{-1} n^r \omega(\mathcal{X}_r n^{-r}) f_{nr}(x), \quad x \in \Pi,$$

wenn f_{nr} die Favard'schen Perfekt-Splines sind.

Beweis. Wählen wir f in V_{ω}^r und g in $C^{(r)}(\Pi)$, so gilt wegen 3.1.

$$\begin{aligned} E_{n-1}^*(f) &\leq E_{n-1}^*(f-g) + E_{n-1}^*(g) \leq \\ &\leq \|f-g\|_{\infty} + \mathcal{K}_r \cdot n^{-r} \|g^{(r)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

oder

$$E_{n-1}^*(f) \leq K_r(\mathcal{K}_r \cdot n^{-r}; f) \leq \omega(\mathcal{K}_r n^{-r})$$

oder

$$E_{n-1}^*(V_{\omega}^r) \leq \omega(\mathcal{K}_r n^{-r}),$$

womit die eine Ungleichung über intermediäre Approximation gezeigt ist.

Zum Nachweis der umgekehrten Richtung beachten wir, daß für die Favard'schen Perfekt-Splines f_{nr} gilt :

$$K_r(t; f_{nr}) = \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq \mathcal{K}_r \cdot n^{-r}, \\ \mathcal{K}_r \cdot n^{-r} & , t \geq \mathcal{K}_r \cdot n^{-r}, \end{cases}$$

denn wegen $f_{nr} \in W_r^*$ haben wir bestmöglich

$$K_r(t; f_{nr}) \leq 0 + t \|f_{nr}^{(r)}\|_{\infty},$$

und es gilt

$$\begin{aligned} E_{n-1}^*(f_{nr}) &= \mathcal{K}_r \cdot n^{-r} \leq K_r(\mathcal{K}_r \cdot n^{-r}; f_{nr}) \leq \|f_{nr}\|_{\infty} \\ &= \mathcal{K}_r n^{-r} \end{aligned}$$

wegen des Alternantensatzes von Tschebyshev.

Betrachten wir die modifizierten Funktionen

$$h_{nr}(\omega; x) := \mathcal{K}_r^{-1} \cdot n^r \omega(\mathcal{K}_r \cdot n^{-r}) f_{nr}(x), \quad x \in \Pi,$$

so gilt wegen der positiven Homogenität des K-Funktional

$$K_r(t; h_{nr}(\omega; \cdot)) = \begin{cases} \mathcal{K}_r^{-1} \cdot n^r \omega(\mathcal{K}_r \cdot n^{-r}) t & , 0 \leq t \leq \mathcal{K}_r n^{-r}, \\ \omega(\mathcal{K}_r n^{-r}) & , t \geq \mathcal{K}_r n^{-r}, \end{cases}$$

das heißt, da ω als K-Modul konkav ist

$$K_r(t; h_{nr}(\omega; \cdot)) \leq \omega(t), \quad t \geq 0,$$

und somit gilt

$$h_{nr}(\omega; \cdot) \in V_{\omega}^r$$

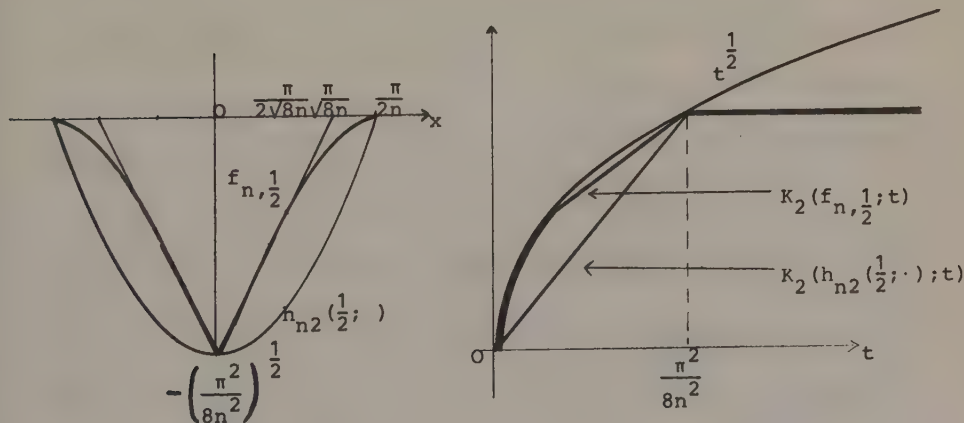
und

$$E_{n-1}^*(h_{nr}(\omega; \cdot)) = \omega(\mathcal{X}_r n^{-r}),$$

was zu zeigen war.

Wir bemerken noch, daß die in Beispiel 2.11. angegebenen Funktionen $f_{n,\alpha}$ in den Klassen V_{ω}^2 mit $\omega(t) := t^{\alpha}$ ebenfalls extremal sind, und daß deren K-Funktionale sogar auf einem nicht-ausgearteten Intervall mit $\omega(t)$ übereinstimmen.

Wir skizzieren die Funktionen $h_{n2}(\omega; \cdot)$ und $f_{n,\alpha}$ für den Fall $\omega(t) = t^{\alpha} = t^{1/2}$:



3.3. Die Sätze von Bernstein und Fisher

Für die beste Approximation der Klasse W_r durch algebraische Polynome gibt es kein Resultat entsprechend dem Satz von Favard und Achieser-Krein im periodischen Fall. Allerdings hat S. D. Fisher (siehe Fisher-Jerome, 1975) im Jahre 1975 gezeigt, daß die extremalen Funktionen in W_r (bezüglich ρ_n) wie bei Favard und Achieser-Krein Perfekt-Splines sind und hat diese charakterisiert. Es zeigt sich, daß diese Perfekt-Splines im allgemeinen nicht die gleichmäßige Knotenverteilung haben wie die periodischen Extremalfunktionen.

Für $r=1$ und $n=1,2,3$ haben wir als Beispiel die beste Approximation von W_r bestimmt; das Verfahren läßt jedoch für $n \geq 4$ nur eine numerische Lösung zu.

Schon im Jahre 1947 hatte S. N. Bernstein (siehe Fisher-Jerome, 1975) gezeigt, daß $E_n(W_r)$ und $E_n^*(W_r^*)$ asymptotisch übereinstimmen, genauer :

Satz 3.4. (von Bernstein) Für $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r E_n(W_r) = \mathcal{H}_r,$$

wenn $\mathcal{H}_r$ die Favard-Konstante aus Satz 3.1. bezeichnet.

Der Satz von Fisher lautet :

Satz 3.5. Seien $r, n \in \mathbb{N}$, und sei $f_0 \in W_r$ eine Lösung von

$$e_{nr} := E_n(W_r) = E_n(f_0), \quad n \geq r-1,$$

Dann ist f_0 ein Perfekt-Spline mit genau $n-r+1$ Knoten

in $(-1, +1)$.

Ist $n = r-1$, so ist f_0 ein konstantes Vielfaches des n -ten Tschebyschev-Polynoms.

Ist f_0 eine Lösung von $e_{nr} = E_n(f_0)$, so auch $f_0 + p$, wenn p ein Polynom vom Grad $r-1$ ist.

Eine offensichtliche Folgerung aus 3.4. und 3.5. ist, daß für extremale Perfekt-Splines höherer Knotenzahl in W_r eine äquidistante Knotenverteilung nicht möglich ist.

Ist nämlich $r=1$, und ist f_n der Perfekt-Spline mit den Knoten $-1 + \frac{2}{n+1} k$, $1 \leq k \leq n$, mit $f_n(-1) = 0$ und $f'_n(x) = +1$ auf $(-1, -1 + \frac{2}{n+1})$, so gilt nach dem Tschebyschev-schen Alternantensatz

$$E_n(f_n) = \frac{1}{n+1}.$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n E_n(f_n) = 1 < \lim_{n \rightarrow \infty} n^1 e_{n1} = \frac{\pi}{2}$$

kann f_n jedoch nicht extremal sein.

Wir haben aber

- Proposition 3.6. a) $e_{11} = \frac{1}{2}$;
 b) $e_{21} = 6 - 4\sqrt{2} > \frac{1}{3}$;
 c) $e_{31} = \frac{1}{108} (10 + 7\sqrt{7}) > \frac{1}{4}$;
 d) $e_{41} > 0.215925 > \frac{1}{5}$.

Beweis. Wir skizzieren nur den Beweis von b).

Eine extremale Funktion f mit $f(-1) = 0$ hat Knoten $-1 < \alpha < \beta < +1$ mit $f'(x) = 1$ auf $(-1, \alpha)$.

Die beste Approximation g von f in $\mathcal{P}_2$ hat mit f die

Alternantenpunkte $-1, \alpha, \beta, +1$, und es gilt

$$(f - g)(\alpha) = \varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta) > 0.$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem liefert die Funktion

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = 1 + \alpha - \beta + \frac{(\alpha+1)(2\alpha-\beta+1)}{(\beta+1)(\beta-\alpha-2)} - \frac{(1-\beta)(2\beta-\alpha-1)}{(1-\alpha)(\beta-\alpha-2)}$$

mit lokalem Maximum

$$\alpha = -\beta = 1 - \sqrt{2}.$$

Es folgt

$$E_2(W_1) = \sup_{-1 < \alpha < \beta < 1} \varepsilon(\alpha, \beta) = 6 - 4\sqrt{2}.$$

Für $n \geq 4$ liefert das Verfahren algebraische Gleichungen ≥ 5 -ten Grades in mehreren Variablen und ist nur numerisch auszuwerten.

3.4. Beste Approximation in $V_{\omega}^r[-1, +1]$

Entsprechend der Bestimmung von $E_n^*(V_{\omega}^r(\pi))$ über den Satz von Favard und Achieser-Krein können wir im Algebraischen über den Satz von Fisher ein analoges Resultat herleiten.

Es gilt die

Proposition 3.7. Sei ω ein K -Modul, und seien $r, n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$E_n(V_{\omega}^r[-1, +1]) = \omega(e_{nr}),$$

mit $e_{nr} = E_n(W_r)$.

Ist f_{nr} ein extremaler Perfekt-Spline für $E_n(W_r)$, so ist

$$h_{nr}(\omega; x) := \frac{\omega(e_{nr})}{e_{nr}} \cdot f_{nr}, \quad x \in [-1, +1]$$

extremal in $V_{\omega}^r[-1, +1]$ (bezüglich $\mathcal{J}_n$).

Beweis. Wie in 3.3. haben wir für $f \in V_{\omega}^r[-1, +1]$ sofort

$$E_n(f) \leq K_r(e_{nr}; f) \leq \omega(e_{nr})$$

und

$$E_n(V_{\omega}^r[-1, +1]) \leq \omega(e_{nr}).$$

Ist umgekehrt $h_{nr}(\omega; \cdot)$ wie oben angegeben, so gilt

für $0 \leq t \leq e_{nr}$:

$$K_r(t; h_{nr}(\omega; \cdot)) = \frac{\omega(e_{nr})}{e_{nr}} \cdot K_r(t; f_{nr}) \leq \frac{\omega(e_{nr})}{e_{nr}} \cdot t \leq \omega(t),$$

und wegen obigem

$$\omega(e_{nr}) = \frac{\omega(e_{nr})}{e_{nr}} E_n(f_{nr}) = E_n(h_{nr}(\omega; \cdot)) \leq E_n(V_{\omega}^r[-1, +1]).$$

Das Bernsteinsche Resultat läßt sich nicht ohne weiteres auf die Mengen V_{ω}^r übertragen.

Wir zeigen die Verallgemeinerung für eine Klasse von K-Mo-
duln, die im Zusammenhang mit dem Umkehrsatz von Bernstein

Eine Funktion $f \in C(\Pi)$ gehört zu

$$\text{Lip } \alpha = \{f \in C(\Pi) : \sup_{0 < \delta \leq \pi} \frac{\omega(f; \delta)}{\delta^{\alpha}} < \infty\}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

genau dann wenn

$$E_n^*(f) = O(n^{-\alpha})$$

ausgezeichnet wurden. Lozinski, sowie Bari und Stechkin haben
nämlich (siehe Lorentz, 1966; S. 61 f) die Frage nach den iso-
tonen Funktionen $\psi(u) > 0$, $0 < \delta \leq 1$ beantwortet, für die gilt

$$E_n^*(f) = O(\psi(n^{-1})) \Leftrightarrow \omega(f; \delta) = O(\psi(\delta)).$$

Die Antwort besagt, daß eine Konstante $C > 1$ existieren muß, für die gilt :

$$1 < \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(Cu)}{\psi(u)} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(Cu)}{\psi(u)} < C.$$

Unsere Verallgemeinerung lautet nun

Satz 3.8. Sei $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ein K -Modul mit der Eigenschaft

$$\exists C > 1, \exists q < 1 \exists$$

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\omega(\delta)}{\omega(C\delta)} \leq q < 1, \text{ für } \delta \rightarrow 0+.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(V_{\omega}^r[-1, +1])}{E_n^*(V_{\omega}^r(\pi))} = 1.$$

Beweis. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r e_{nr} = \mathcal{K}_r$ finden wir für $\varepsilon > 0$ und schließlich alle $n \in \mathbb{N}$, daß

$$e_{nr} \leq \frac{1}{n^r} (\mathcal{K}_r + \varepsilon).$$

Für diese n gilt wegen der Subadditivität von ω und der Aussage von Satz 3.3.

$$\begin{aligned} E_n(V_{\omega}^r[-1, +1]) &= \omega(e_{nr}) \leq \omega\left(\frac{1}{n^r} \mathcal{K}_r + \frac{\varepsilon}{n^r}\right) \\ &\leq E_{n-1}^*(V_{\omega}^r(\pi)) + \omega\left(\frac{\varepsilon}{n^r}\right) \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\frac{E_n(V_{\omega}^r[-1, +1])}{E_{n-1}^*(V_{\omega}^r(\pi))} \leq 1 + \frac{\omega(\varepsilon/n^r)}{\omega(\mathcal{K}_r/n^r)}.$$

Wählen wir $\varepsilon > 0$ so, daß

$$\mathcal{K}_r = C^m \varepsilon,$$

so gilt

$$\frac{\omega(\varepsilon/n^r)}{\omega(\mathcal{K}_r/n^r)} = \frac{\omega(\varepsilon/n^r)}{\omega(C^m \varepsilon/n^r)} = \frac{\omega(C^{m-1} \varepsilon/n^r)}{\omega(C^m \varepsilon/n^r)} \cdot \frac{\omega(C^{m-2} \varepsilon/n^r)}{\omega(C^{m-1} \varepsilon/n^r)} \cdots \frac{\omega(\varepsilon/n^r)}{\omega(2\varepsilon/n^r)} \leq q^m.$$

Dies liefert

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(V_\omega^r[-1, +1])}{E_n^*(V_\omega^r(\Pi))} \leq 1.$$

Andererseits gilt für $\varepsilon > 0$ und schließlich alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n^r e_{nr} \leq \mathcal{K}_r - \varepsilon$$

oder

$$\omega\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right) \leq \omega(e_{nr}) + \omega\left(\frac{\varepsilon}{n^r}\right)$$

oder

$$\frac{E_{n-1}^*(V_\omega^r(\Pi))}{E_n(V_\omega^r[-1, +1])} < 1 + \frac{\omega(\varepsilon/n^r)}{\omega(e_{nr})}.$$

Wählen wir entsprechend obigem ε so, daß

$$n^r e_{nr} = C^m \varepsilon,$$

so gilt wieder

$$\frac{\omega(\varepsilon/n^r)}{\omega(e_{nr})} \leq q^m$$

und damit

$$\frac{E_n^*(V_\omega^r(\Pi))}{E_n(V_\omega^r[-1, +1])} \leq 1,$$

was zu zeigen war.

3.5. n-te Weiten von V_ω^r

Wir wollen zum Abschluß noch zeigen, daß wir für die beste Approximation in Satz 3.3. einen 'optimalen' Raum zur Approximation von V_ω^r gewählt haben, in Proposition 3.7. nicht.

Hierzu die folgende, auf A. N. Kolmogorov (Kolmogorov, 1936; siehe Lorentz, 1966) zurückgehende

Definition 3.9. Sei $W \subset C(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Größe

$$d_n(W) := \inf \left\{ \delta(W; G_n) : \begin{array}{l} G_n \text{ ist } n\text{-dimensional-} \\ \text{ler Teilraum von } C(X) \end{array} \right\}$$

die n-te Weite von W (oder der Kolmogorov-Radius der Ordnung n von W).

Ist G_n ein n -dimensionaler Teilraum von $C(X)$ mit

$$d_n(W) = \delta(W; G_n),$$

so heißt G_n optimal (bezüglich W).

Der entscheidende Durchbruch bei der Bestimmung n-ter Weiten von Funktionenklassen in $C(X)$ gelang V. M. Tikhomirov in einer Reihe von Arbeiten in den Sechziger Jahren (Tikhomirov, 1960, 1960, 1969). Es stellte sich heraus, daß in allen behandelten Fällen Räume von Spline-Funktionen optimal sind; im Periodischen bieten die trigonometrischen Polynome eine ebensogute Approximation, im Algebraischen erweisen sich die Polynomräume als nicht optimal.

Es gilt der folgende

Satz 3.10. (Tikhomirov, 1960)

Die n -ten Weiten von W_r^* sind gegeben durch

$$d_0(W_r^*) = \infty$$

und

$$d_{2n-1}(W_r^*) = d_{2n}(W_r^*) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} ; \quad n, r \in \mathbb{N}.$$

Optimale Unterräume sind die $2n-1$ - dimensionalen Räume $\mathcal{T}_{n-1}$ der trigonometrischen Polynome und die $2n-1$ - dimensionalen Räume der periodischen Splinefunktionen vom Grad n mit Knoten $k\pi/n$, $k = 1, 2, \dots, 2n$, in Π .

Auf unseren Satz 3.3. angewandt, ergibt sich sofort das

Korollar 3.11. Für $r, n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$d_{2n-1}(V_\omega^r) = d_{2n}(V_\omega^r) = \omega\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right)$$

mit den extremalen Räumen aus 3.10.

Beweis. Wir haben für $n \in \mathbb{N}$ zunächst

$$d_{2n}(V_\omega^r) \leq d_{2n-1}(V_\omega^r) \leq \omega\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right).$$

Umgekehrt zeigen wir für jeden $2n$ -dimensionalen Teilraum G_{2n} von $C(\Pi)$

$$\omega\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right) \leq \delta(V_\omega^r; G_{2n})$$

und folgen dabei weitgehend dem Ruban'schen Beweis bei der Bestimmung von $d_{2n}(W_r^*, H_\omega)$ (Ruban, 1974; siehe auch Lorentz, 1966)

Sei also G_{2n} ein $2n$ -dimensionaler Teilraum von $C(\Pi)$ und

$$\theta_k(\alpha) := \alpha + k \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq 2n, \\ , \text{ falls } r \text{ ungerade,}$$

$$\theta_k(\alpha) := \alpha + \frac{1\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq 2n, \\ , \text{ falls } r \text{ gerade.}$$

Sei

$$\Phi_\alpha : \begin{cases} C(\pi) & \longrightarrow (R^{2n}, \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longrightarrow (f(\theta_0(\alpha)), \dots, f(\theta_{2n-1}(\alpha))). \end{cases}$$

Da G_{2n} gerade Dimension hat, ist G_{2n} kein Tschebyschev-Raum, so daß ein α_0 existiert mit

$$\dim(\Phi_{\alpha_0}(G_{2n})) \leq 2n-1.$$

Wir setzen

$$y_k := \alpha_0 + k \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq 2n-1, \quad r \text{ ungerade,}$$

$$y_k := \alpha_0 + \frac{1\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq 2n-1, \quad r \text{ gerade.}$$

Sind $f_{n,k+1}$ die Favard'schen Perfekt-Splines, so setzen wir für $0 \leq k \leq r-1$:

$$F_k(x) := \frac{\omega(\mathcal{J}_{k+1}/n^{k+1})}{\mathcal{J}_{k+1}/n^{k+1}} f_{n,k+1}(x - \alpha_0 - \frac{\pi}{2n}), \quad x \in \pi,$$

und konstruieren einen Teilraum

$$X_{2n} \subset C(\pi)$$

wie folgt:

Seien $g_i \in C(\pi)$, $1 \leq i \leq 2n$ mit

$$g_i(x) := \begin{cases} |F_0(x)| & , x \in [y_{k-1}, y_k] \\ 0 & , x \in \pi \setminus [y_{k-1}, y_k]. \end{cases}$$

Ist $r = 1$, so bezeichnen wir mit X_{2n} die Menge aller Linearkombinationen

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n} c_i g_i(x), \quad x \in \pi;$$

Für $r = 2, 3, \dots$ bezeichnen wir mit X_{2n} die Menge aller

(r-1)-ten periodischen Integrale (mit beliebigem Mittelwert)
von f. Dann hat X_{2n} Dimension $2n$.

Aus der Konstruktion der X_{2n} folgt für $f \in X_{2n}$ (da
bei jeder periodischen Integration Maxima und Minima um $\frac{1\pi}{2n}$
nach rechts verschoben werden) :

$$\|f\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq 2n} |f(y_k)| = \|\Phi_{\alpha_0}(f)\|_{\infty}.$$

Die Kugel

$$\text{ball } X_{2n} := \{f \in X_{2n} : \|f\|_{\infty} \leq \|F_{r-1}\|_{\infty} = \mathcal{K}_r/n^r\}$$

liegt nach Konstruktion in V_{ω}^r , denn für $f \in \text{ball } X_{2n}$ gilt :

$$K_r(t;f) \leq \frac{\omega(\mathcal{K}_r/n^r)}{\mathcal{K}_r/n^r} \cdot t \leq \omega(t), \quad 0 \leq t \leq \mathcal{K}_r/n^r,$$

und

$$K_r(t;f) \leq \|f\|_{\infty} \leq \omega(\mathcal{K}_r/n^r) \leq \omega(t), \quad t \geq \mathcal{K}_r/n^r.$$

Nach dem Satz von Gohberg-Krein (Lorentz, 1966) gibt es
ein $f^* \in \text{sph } X_{2n}$ mit

$$\Phi_{\alpha_0}(f^*) \perp \Phi_{\alpha_0}(G_{2n}) \quad \text{in } \mathbb{R}^{2n},$$

das heißt, für alle $g \in G_{2n}$ gilt :

$$\begin{aligned} \|f^* - g\|_{\infty} &\geq \max_{0 \leq k \leq 2n-1} |f^*(y_k) - g(y_k)| = \\ &= \|\Phi_{\alpha_0}(f^*) - \Phi_{\alpha_0}(g)\|_{\infty} \geq \|\Phi_{\alpha_0}(f^*)\|_{\infty} = \\ &= \|f^*\|_{\infty} = \omega(\mathcal{K}_r/n^r). \end{aligned}$$

Das heißt

$$\omega(\mathcal{K}_r/n^r) \leq \delta(\text{ball } X_{2n}; G_{2n}) \leq \delta(V_{\omega}^r; G_{2n})$$

oder

$$\omega(\mathcal{K}_r/n^r) \leq d_{2n}(V_{\omega}^r) \leq d_{2n-1}(V_{\omega}^r) \leq \omega(\mathcal{K}_r/n^r).$$

Was den algebraischen Fall betrifft, so hat Tikhomirov schon 1960 gezeigt, daß für die Klassen W_r gilt :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r d_n(W_r) = \frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} .$$

In einem sehr tiefliegenden Resultat aus dem Jahre 1969 (Tikhomirov, 1969) gab er die exakten n -ten Weiten als die Perfekt-Spline-Lösung f_0 eines Minimierungsproblems in W_r an und ermittelte Räume von Splinefunktionen mit den Knoten von f_0 als die optimalen.

Auf unsere Klassen V_ω^r ergibt sich aus den Ergebnissen von Tikhomirov, daß die Räume $\mathcal{P}_n$ der Polynome zur Ermittlung der n -ten Weiten von V_ω^r nicht optimal sind.

Es ergibt sich indes schon aus den Ergebnissen von Lorentz (Lorentz, 1966), daß die $\mathcal{P}_n$ für V_ω^r schon die richtige Approximationsordnung liefern.

L I T E R A T U R

Achieser, N. I.

- [1967] Vorlesungen über Approximationstheorie, Akademie-Verlag, Berlin.

Bergh, J und Löffström, J

- [1976] Interpolation Spaces, Springer-Verlag, Grundlehren, 223, Heidelberg.

Fisher, S. D. und Jerome, J. W.

- [1975] Minimum Norm Extremals in Function Spaces, Springer-Verlag, Lecture Notes 479, Heidelberg.

Karlin, S. und Studden, W. J.

- [1966] Tchebyshev Systems, Interscience, New York.

Kolmogorov, A.

- [1936] Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, Ann. Math. (2), 37, 107-111.

Korneitschuk, N. P.

- [1976] Extremalaufgaben der Approximationstheorie, Nauka-Verlag, Moskau (russisch) .

Lorentz, G. G.

- [1966] Approximation of Functions , Holt, Reinhardt und Wilson, New York.

Mitjagin, B. S. und Semenov, E. M.

- [1977] Lack of Interpolation of Linear Operators
in Spaces of Smooth Functions, Math. USSR
Izvestija (11), 6, 1229-1266

Ruban, W. N.

- [1974] Even Diameters of the Classes $W_{r\omega}^H$, Math.
Zametki (15), 3, 17-32.

Schumaker, L.

- [1975] Toward a Constructive Theory of Generalized
Spline Functions, in Spline Functions,
Springer Lecture Notes 501, 265-331.

Tikhomirov, V. M.

- [1960] On n-dimensional Diameters of Certain Functional
Classes, Sov. Math. Dokl. (1), 94-97.
- [1960] Diameters of Sets in Function Spaces and the
Theory of Best Approximations, Uspehi (3), 93,
81-120.
- [1969] Best Methods of Approximation and Interpolation
of Differentiable Functions in the Space
 $C[-1,1]$, Math. USSR - Sb. (9), 275-289.

Lebenslauf

Am 5. August 1951 wurde ich, Ullrich Sattes, in Würzburg als Sohn des Juristen Friedrich Sattes (verst. 1956) und der Ärztin Dr. Anneliese Sattes, geb. Benz, geboren. Ab September 1957 besuchte ich die Goethe-Volksschule zu Würzburg, im September 1961 trat ich in das Siebold-Realgymnasium zu Würzburg ein. Nach mehreren Schulwechseln erhielt ich am 20. Juni 1970 vom Gymnasium Bad Tölz das Zeugnis der Reife.

Ab Wintersemester 1970/71 studierte ich an der Universität Erlangen-Nürnberg Mathematik mit Diplomprüfung als geplanten Abschluß. Im Wintersemester 1973/74 war ich an der Georg-August-Universität zu Göttingen immatrikuliert. Meine Vordiplomprüfung bestand ich am 25. Mai 1973, mein Diplom erhielt ich am 19. Juli 1976. Seitdem bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft resp. als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut bzw. am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg tätig und gleichzeitig Doktorand bei Herrn Professor Dr. H. Berens.

Erlangen, im Februar 1980

Offset — 
Siebdruck
S.Kriegelstein

Bierlachweg 37 8520 Erlangen
Telefon 09131/33907